19.02.2017

Битовые операции в задачах КИМ ЕГЭ по информатике. Часть II

К.Ю. Поляков,
д.т.н., учитель информатики ГБОУ СОШ № 163,
г. Санкт-Петербург

В данной статье рассматриваются задачи следующего типа (впервые эти задачи появились в КИМ на ЕГЭ 2015 года):

Введём выражение *M* & *K*, обозначающее поразрядную конъюнкцию *M* и *K* (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи).

1. Определите наименьшее натуральное число *a*, такое что выражение
$$(x \,\&\, a = 0\,) \to ((x \,\&\, 29 = 0) \;\to\; (x \,\&\, 43 \neq 0))$$
тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной *x*)?
2. Определите наибольшее натуральное число *a*, такое что выражение
$$(x \,\&\, a \neq 0\,) \to ((x \,\&\, 29 = 0) \;\to\; (x \,\&\, 43 \neq 0))$$
тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной *x*)?

Предлагается и обосновывается новый подход к решению таких задач, основанный на идее **А.В. Здвижковой** (г. Армавир).

Обозначения

Через $\mathbf{Z}_K$ обозначим множество чисел, которые в результате поразрядной конъюнкции с числом *K* дают 0:

$$\mathbf{Z}_K = \{x:\; x \,\&\, K = 0\}\,.$$

Соответственно, числа, которые в результате поразрядной конъюнкции с числом *K* дают ненулевое значение, составляют множество $\overline{\mathbf{Z}}_K$:

$$\overline{\mathbf{Z}}_K = \{x:\; x \,\&\, K \neq 0\}\,.$$

Введём утверждения

$$Z_K(x) = (x \in \mathbf{Z}_K)\,, \quad \overline{Z}_K(x) = (x \in \overline{\mathbf{Z}}_K)\,.$$

Для сокращения записи будем вместо $Z_K(x)$ и $\overline{Z}_K(x)$ писать соответственно Z_K и $\overline{Z}_K$.

Нашей целью будет поиск чисел *a*, при которых некоторое логическое выражение, зависящее от *a*, истинно для любых натуральных значений *x*. Будет обозначать через *A* выражение $Z_a(x)$.

Два свойства импликации

Сначала докажем два свойства импликации, которые будут нам нужны далее[1].

Свойство 1. Следующее равенство тождественно истинно:

$$A \to (B + C) = (A \to B) + (A \to C)$$

[1] Автору не удалось обнаружить их в известной литературе, хотя они легко доказываются.

Доказательство. Представим левую и правую часть равенства через операции ИЛИ и НЕ:

$$A \to (B+C) = \overline{A} + B + C$$

$$(A \to B) + (A \to C) = \overline{A} + B + \overline{A} + C = \overline{A} + B + C$$

В обоих случаях получили одинаковые выражения, что и требовалось доказать.

Свойство 2. Следующее равенство тождественно истинно:

$$A \to (B \cdot C) = (A \to B) \cdot (A \to C)$$

Доказательство. Представим левую и правую часть равенства через операции ИЛИ и НЕ:

$$A \to (B \cdot C) = \overline{A} + B \cdot C$$

$$(A \to B) \cdot (A \to C) = (\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + C) = \overline{A} + B \cdot C$$

При упрощении второго выражения использован распределительный закон. В результате в обоих случаях получили одинаковые выражения, что и требовалось доказать.

Математическое обоснование метода

В этом разделе мы докажем несколько утверждений, на которых основан предлагаемый метод решения.

Утверждение 1. Пусть логическое выражение Z_K истинно для некоторого натурального числа *x*. Тогда все биты двоичной записи числа *x*, соответствующие единичным битам двоичной записи числа *K*, нулевые.

Доказательство. Пусть k_i – *i*-ый бит числа *K* (находящийся в *i*-м разряде его двоичной записи) – равен 1. По условию для числа *x* истинно логическое выражение

$$Z_K(x) = (x \,\&\, K = 0)\,.$$

Тогда в результате конъюнкции с соответствующим *i*-м битом двоичной записи числа *x*, который обозначим как x_i, получаем $x_i \,\&\, k_i = 0$. Поскольку по условию $k_i = 1$, это возможно только при $x_i = 0$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Логическое выражение $Z_K \to Z_M$ истинно для всех *x* тогда и только тогда, когда множество единичных битов двоичной записи числа *M* входит во множество единичных битов двоичной записи числа *K*.

Доказательство. Пусть множество единичных битов числа *M*:

$$B_M = \{m_1, m_2, ..., m_q\}$$

входит во множество единичных битов числа *K*:

$$B_K = \{k_1, k_2, ..., k_p\}$$

и пусть для некоторого *x* выполняется условие Z_K. Это значит, что все биты числа *x* с номерами $k_1, k_2, ..., k_p$ равны 0. Поскольку любой единичный бит числа *M* входит в это множество, истинно также и условие Z_M.

Предположим обратное: условие $Z_K \to Z_M$ истинно для всех *x*. Пусть при этом один из единичных битов числа *M*, скажем, бит с номером m_1, не входит во множество B_K. Это значит, что для любого числа *x*, в котором все биты из множества B_K равны 0, а бит m_1 равен 1, высказывание Z_K будет истинно, а Z_M – ложно, так что высказывание $Z_K \to Z_M$ истинно не для всех *x*. Получили противоречие, что и доказывает вторую часть утверждения.

> **Утверждение 3.** Для любого натурального *x* справедливо равенство:
>
> $$(Z_K \cdot Z_M) = Z_{K \text{ or } M},$$
>
> где **or** обозначает поразрядную дизъюнкцию между двоичной записью чисел *K* и *M*.

Доказательство. Обозначим множества единичных битов чисел *K* и *M* через

$$B_K = \{k_1, k_2, ..., k_p\},\ B_M = \{m_1, m_2, ..., m_q\}$$

Пусть одновременно истинны логические выражения Z_K и Z_M. Тогда логическое выражение Z_N истинно для всех *N*, у которых множество единичных битов

$$B_N = \{n_1, n_2, ..., n_w\}$$

таково, что каждый из них входит во множество B_K или во множество B_M. В частности, одно из таких чисел – это $N = K \text{ or } M$.

Напротив, пусть $N = K \text{ or } M$. При этом все единичные биты двоичной записи чисел *K* и *M* входят во множество B_N. Из утверждения 2 следует, что одновременно истинны выражения Z_K и Z_M, то есть истинно $Z_K \cdot Z_M$. Утверждение доказано.

> **Утверждение 4.** При любых натуральных числах *K* и *M* существуют значения *x*, при которых логическое выражение $Z_K \to \overline{Z}_M$ ложно.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

1) Множество единичных битов числа *M*, $B_M = \{m_1, m_2, ..., m_q\}$, входит во множество единичных битов числа *K*, $B_K = \{k_1, k_2, ..., k_p\}$. Если при этом истинно Z_K, то все биты числа *x* из множества B_K равны нулю. Среди этих битов не может быть ненулевых. Поэтому высказывание $Z_K \to \overline{Z}_M$ ложно для всех *x*, для которых истинно Z_K.

2) Множество B_M содержит биты, не входящие во множество B_K. При этом высказывание $Z_K \to \overline{Z}_M$ ложно для всех *x*, для которых истинно Z_K и, кроме того, все биты, входящие во множество B_M, равны нулю.

> **Утверждение 5.** При любых натуральных числах *K* и *M* существуют значения *x*, при которых логическое выражение $Z_K \to Z_M \cdot \overline{Z}_N$ ложно.

Доказательство. Применим доказанное выше свойство 2 импликации:

$$Z_K \to Z_M \cdot \overline{Z}_N = (Z_K \to Z_M) \cdot (Z_K \to \overline{Z}_N)$$

В силу утверждения 4 второй сомножитель, $Z_K \to \overline{Z}_N$, равен нулю хотя бы для некоторых *x*, что доказывает утверждение.

> **Утверждение 6.** Пусть выражение $Z_K \to Z_N$ истинно при любом натуральном *x*. Тогда выражение $Z_K \to (A + Z_N)$ истинно для всех *x* при любом выборе *a*.

Доказательство. Применим доказанное выше свойство 1 импликации:

$$Z_K \to (A + Z_N) = (Z_K \to A) + (Z_K \to Z_N)$$

Так как второе слагаемое истинно при любых *x*, результат не зависит от первого слагаемого, то есть от выбора *a*.

Утверждение 7. Пусть выражение $Z_K \to Z_N$ ложно при некотором натуральном *x*. Тогда выражение $Z_K \to (A + Z_N)$ истинно для всех *x* при условии, что $Z_K \to A = 1$.

Доказательство. Применим доказанное выше свойство 1 импликации:

$$Z_K \to (A + Z_N) = (Z_K \to A) + (Z_K \to Z_N)$$

Если первое слагаемое истинно при любых *x*, то и левая часть равенства тоже истинна. Что и требовалось доказать.

Утверждение 8. Пусть выражение $Z_K + Z_M$ истинно при некотором натуральном *x*. Тогда истинно выражение $Z_{K\,\&\,M}$.

Доказательство. Обозначим множества единичных битов чисел *K* и *M* через

$$B_K = \{k_1, k_2, ..., k_p\},\ B_M = \{m_1, m_2, ..., m_q\}$$

Пусть для некоторого *x* истинно одно из логических выражений, Z_K или Z_M. Истинность Z_K означает, что в числе *x* биты с номерами $k_1, k_2, ..., k_p$ – нулевые, истинность Z_M означает, что в числе *x* биты с номерами $m_1, m_2, ..., m_q$ – нулевые. В любом случае биты числа *x*, номера которых входят в оба множества, и в $B_K = \{k_1, k_2, ..., k_p\}$, и в $B_M = \{m_1, m_2, ..., m_q\}$, – нулевые. Соответствующее число можно получить как результат поразрядной операции «И» между числами *K* и *M*. Утверждение доказано.

Необходимо отметить, что обратное высказывание неверно: если $Z_{K\,\&\,M}$ истинно, то это совершенно не означает, что истинно $Z_K + Z_M$. Контрпример: пусть при *K* = 3 и *M* = 5 истинно выражение $Z_{K\,\&\,M} = Z_{3\,\&\,5} = Z_1$, то есть бит 0 числа *x* равен нулю. Этому условию соответствует любое чётное число, например, *x* = 6, в котором биты 1 и 2 равны 1, то есть $Z_K(6) = Z_3(6) = 0$ и $Z_M(6) = Z_5(6) = 0$.

Утверждение 9. Минимальное натуральное число *a*, при котором истинно выражение $A \to (Z_K + Z_M)$, равно $\min(K, M)$.

Доказательство. Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$A \to (Z_K + Z_M) = (A \to Z_K) + (A \to Z_M)$$

Как следует из Утверждения 2, при *A* = *K* или *A* = *M* это выражение равно 1 при всех *x*, так как, по крайней мере, одно из слагаемых равно 1. Таким образом, при $a = \min(K, M)$ утверждение верно.

Докажем, что нет меньшего подходящего *a*, используя метод «от противного»: пусть существует такое *a*, меньшее, чем $\min(K, M)$, при котором $A \to (Z_K + Z_M) = 1$ для всех натуральных *x*.

Поскольку *a* < *K*, двоичная запись числа *K* содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа *a* (обозначим это множество битов через B_K^0). Поэтому для всех чисел *x*, у которых все единичные биты числа *a* также равны 1, но ещё есть единичные биты из множества B_K^0, получаем $A \to Z_K = 1 \to 0 = 0$.

Аналогично двоичная запись числа *M* содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа *a* (обозначим это множество через B_M^0). Поэтому для всех чисел *x*, у которых все единичные биты числа *a* также равны 1, но ещё есть единичные биты из множества B_M^0, получаем $A \to Z_M = 1 \to 0 = 0$. Таким образом, для всех чисел, в двоичной записи которых все единичные биты числа *a* равны 0, но есть ещё единичные биты, входящие во множества B_K^0 и B_M^0, оба слагаемых равны 0, так что все выражение ложно. Что и требовалось доказать.

Утверждение 10. Пусть $Z_K \to Z_M = 0$. Тогда $Z_K \to (A + Z_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_K \to A = 1$.

Доказательство. Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$Z_K \to (A + Z_M) = (Z_K \to A) + (Z_K \to Z_M).$$

Во-первых, если $Z_K \to A = 1$, то сразу $Z_K \to (A + Z_M) = 1$.

Чтобы доказать обратное, рассмотрим слагаемое $Z_K \to Z_M$. Обозначим через B_K множество единичных битов двоичной записи числа *K*,а через B_M^0 – множество единичных битов в двоичной записи числа *M*, которые равны 0 в двоичной записи числа *K*.

Выражение $Z_K \to Z_M$ ложно для всех *x*, в двоичной записи которых все биты из множества B_K равны 0, а среди битов из множества B_M^0 есть единичные. Если для этих значения *x* истинно выражение $Z_K \to (A + Z_M)$, то это значит, что для них $Z_K \to A = 1$. Поскольку в двоичной записи всех таких *x* все биты из множества B_K равны нулю, то $Z_K \to A = 1$ для всех натуральных *x*, что и требовалось доказать.

Утверждение 11. $Z_K \to (A + \overline{Z}_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_{K\,\mathbf{or}\,M} \to A = 1$.

Доказательство. Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$Z_K \to (A + \overline{Z}_M) = (Z_K \to A) + (Z_K \to \overline{Z}_M).$$

Рассмотрим слагаемое $Z_K \to \overline{Z}_M$. Обозначим через B_K множество единичных битов двоичной записи числа *K*,а через B_M – множество единичных битов в двоичной записи числа *M*. Как следует из доказательства Утверждения 4, выражение $Z_K \to \overline{Z}_M$ ложно для всех *x*, в двоичной записи которых все биты из множеств B_K и B_M равны 0. Таким образом, выражение $Z_K \to \overline{Z}_M$ ложно тогда, когда истинно $Z_{K\,\mathbf{or}\,M}$, и истинно тогда, когда истинно $\overline{Z_{K\,\mathbf{or}\,M}}$. Поэтому можно выполнить замену $Z_K \to \overline{Z}_M$ на $\overline{Z_{K\,\mathbf{or}\,M}}$:

$$\begin{aligned} Z_K \to (A + \overline{Z}_M) &= (Z_K \to A) + \overline{Z_{K\,\mathbf{or}\,M}} = \overline{Z}_K + \overline{Z_{K\,\mathbf{or}\,M}} + A \\ &= (Z_K \cdot Z_{K\,\mathbf{or}\,M}) \to A = Z_{K\,\mathbf{or}\,M} \to A \end{aligned}$$

Поскольку в силу Утверждения 3 имеем $Z_K \cdot Z_{K\,\mathbf{or}\,M} = Z_{K\,\mathbf{or}\,M}$, получаем

$$Z_K \to (A + \overline{Z}_M) = Z_{K\,\mathbf{or}\,M} \to A.$$

Утверждение 12. Пусть $Z_K \to Z_L = 0$. Тогда $Z_K \to (A + Z_L \cdot \overline{Z}_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_K \to A = 1$.

Доказательство. Представим выражение в виде

$$Z_K \to (A + Z_L \cdot \overline{Z}_M) = (Z_K \to A) + (Z_K \to Z_L \cdot \overline{Z}_M).$$

Во-первых, если $Z_K \to A = 1$, то сразу $Z_K \to (A + Z_L \cdot \overline{Z}_M) = 1$.

Чтобы доказать обратное, рассмотрим второе слагаемое, преобразуя его согласно Свойству 2:

$$Z_K \to (Z_L \cdot \overline{Z}_M) = (Z_K \to Z_L) \cdot (Z_K \to \overline{Z}_M).$$

Предположим, что для некоторого *a* выражение $Z_K \to A$ ложно при некоторых *x*, но $Z_K \to (A + Z_L \cdot \overline{Z}_M) = 1$ для всех *x*. Поскольку $Z_K \to A$ ложно при некоторых *x*, двоичная запись числа *a* содержит единичные биты, которые равны 0 в двоичной записи числа *K*. Так как по условию двоичная запись числа *L* содержит единичные биты, которые равны 0 в двоичной записи числа *K*, то для значений *x*, в двоичной записи которых эти «лишние» биты равны 1, имеем $Z_K \to Z_L = 0$, так что всё выражение равно 0. Получили противоречие. Следовательно, $Z_K \to A = 1$.

Утверждение 13. Пусть $Z_K \to Z_L = 1$. Тогда $Z_K \to (A + Z_L \cdot \overline{Z}_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_{K\,\mathbf{or}\,M} \to A = 1$.

Доказательство. Используя доказанные выше утверждения, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} Z_K \to (A + Z_L \cdot \overline{Z}_M) &= (Z_K \to A) + (Z_K \to Z_L \cdot \overline{Z}_M) = \\ &= (Z_K \to A) + (Z_K \to Z_L) \cdot (Z_K \to \overline{Z}_M). \\ &= (Z_K \to A) + (Z_K \to Z_L) \cdot \overline{Z_{K\,\mathbf{or}\,M}} \end{aligned}$$

Поскольку по условию множество единичных битов двоичной записи числа *L* является подмножеством множества единичных битов числа *K*, то $Z_K \to Z_L = 1$ для всех *x*. Поэтому выражение далее преобразуется так же, как и при доказательстве Утверждения 11:

$$(Z_K \to A) + \overline{Z_{K\,\mathbf{or}\,M}} = 1$$

$$\overline{Z}_K + A + \overline{Z_{K\,\mathbf{or}\,M}} = 1$$

$$\overline{Z_K \cdot Z_{K\,\mathbf{or}\,M}} + A = 1$$

$$Z_{K\,\mathbf{or}\,M} \to A = 1$$

что и требовалось доказать.

Общий метод решения

Идея метода решения, предложенная **А.В. Здвижковой**, состоит в следующем:

1) упростить логическое выражение так, чтобы свести его к импликации и избавиться от всех инверсий;

2) применить утверждения 3-7 с целью свести задачу к форме, в которой можно использовать утверждение 2.

Упрощение может привести к нескольким разным формам выражения, например,

1) $(Z_K \cdot A) \to Z_N$

2) $Z_K \to A$

3) $Z_K \to (A + Z_N)$

4) $Z_K \to (A \cdot Z_N)$

В первом случае $Z_K \cdot A = Z_{K \text{ or } a}$, так что с помощью числа *a* можно добавить в левую часть единичные биты числа *N*, которых нет во множестве единичных битов числа *K*.

Во втором случае согласно утверждению 2 число *a* должно быть выбрано так, чтобы все его единичные биты входили во множество единичных битов числа *K*.

В третьем случае с помощью утверждений 6 и 7 можно либо свести задачу ко второму случаю, либо придти к выводу от том, что число *a* можно выбрать произвольно.

В четвёртом случае решение не всегда существует: с помощью числа *a* можно добавить в правую часть единичные биты, но нельзя их убрать. Поэтому если множество единичных битов числа *N* не является подмножеством единичных битов числа *K*, задача не имеет решения (при любом выборе *a* выражение будет ложно при некоторых значениях *x*).

Примеры

Пример 1. Определите наименьшее натуральное число *a*, такое что выражение

$$(x \,\&\, 53 \neq 0) \to ((x \,\&\, 41 = 0) \to (x \,\&\, a \neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $\overline{Z}_{53} \to (Z_{41} \to \overline{A})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\overline{Z}_{53} \to (Z_{41} \to \overline{A}) = Z_{53} + (Z_{41} \to \overline{A}) = Z_{53} + \overline{Z}_{41} + \overline{A}$$

Теперь избавляемся от инверсий, применяя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$Z_{53} + \overline{Z}_{41} + \overline{A} = (\overline{Z_{41} \cdot A}) + Z_{53} = (Z_{41} \cdot A) \to Z_{53}.$$

Применяем утверждение 3:

$$(Z_{41} \cdot A) \to Z_{53} = Z_{41 \text{ or } a} \to Z_{53}.$$

Таким образом, с помощью числа *a* мы должны добавить в левую часть недостающие биты – те, которые есть в двоичной записи числа 53, но отсутствуют в двоичной записи числа 41:

```
разряды 5 4 3 2 1 0
  41 = 101001
  53 = 110101
```

Биты, которые обязательно должны быть в числе *a* – это биты в разрядах 4 и 2 (выделены фоном), поэтому минимальное значение числа $a_{\min} = 2^4 + 2^2 = 20$. Можно выбрать и любое другое значение *a*, в двоичной записи которого эти биты равны 1.

Пример 2. Определите наибольшее натуральное число а, такое что выражение

$$(x \,\&\, a \neq 0) \to ((x \,\&\, 20 = 0) \to (x \,\&\, 5 \neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $\overline{A} \to (Z_{20} \to \overline{Z}_5)$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\overline{A} \to (Z_{20} \to \overline{Z}_5) = A + (Z_{20} \to \overline{Z}_5) = A + \overline{Z}_{20} + \overline{Z}_5$$

Теперь избавляемся от инверсий, применяя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$A + \overline{Z}_{20} + \overline{Z}_5 = (\overline{Z_{20} \cdot Z_5}) + A = (Z_{20} \cdot Z_5) \to A.$$

Согласно утверждению 3, $Z_{20} \cdot Z_5 = Z_{20 \text{ or } 5}$. Вычисляем

```
    разряды 4 3 2 1 0
          20 = 10100
           5 = 00101
     20 or 5 = 10101 = 21
```

Таким образом, получили $Z_{21} \to A = 1$. Согласно утверждению 2, все единичные биты числа *a* должны присутствовать в числе 21. Поэтому максимальное значение $a_{\max}$ = 21. Кроме того, можно взять и другие значения *a*, которые не содержат в двоичной записи других единичных битов, кроме 4-го, 2-го и 0-го (это 1, 4, 5, 16, 17 и 20).

Пример 3. Определите наибольшее натуральное число а, такое что выражение

$$(x \,\&\, a \neq 0) \to ((x \,\&\, 12 = 0) \;\to\; (x \,\&\, 21 = 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $\overline{A} \to (Z_{12} \to Z_{21})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\overline{A} \to (Z_{12} \to Z_{21}) = A + (Z_{12} \to Z_{21}) = A + \overline{Z}_{12} + Z_{21}$$

Теперь избавляемся от инверсий, переходя к импликации:

$$A + \overline{Z}_{12} + Z_{21} = Z_{12} \to (A + Z_{21}).$$

Согласно свойству 1 импликации, $Z_{12} \to (A + Z_{21}) = (Z_{12} \to A) + (Z_{12} \to Z_{21})$. Двоичная запись числа 21 = 10101_2 содержит единичные биты, которые не входят во множество единичных битов числа 12 = 1100_2. Поэтому по утверждению 7 задача сводится к обеспечению условия $Z_{12} \to A = 1$.

Согласно утверждению 2, все единичные биты числа *a* должны присутствовать в числе 12. Поэтому максимальное значение $a_{\max}$ = 12. Кроме того, можно взять и другие значения *a*, которые не содержат в двоичной записи других единичных битов, кроме 3-го и 2-го (это 4, 8 и 12).

Пример 4. Определите наименьшее натуральное число а, такое что выражение

$$(\,(x \,\&\, 28 \neq 0) \vee (x \,\&\, 45 \neq 0)) \to ((x \,\&\, 48 = 0) \to (x \,\&\, a \neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $(\overline{Z}_{28} + \overline{Z}_{45}) \to (Z_{48} \to \overline{A})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации:

$$(\bar{Z}_{28}+\bar{Z}_{45}) \to (Z_{48} \to \bar{A}) = \overline{\bar{Z}_{28}+\bar{Z}_{45}} + (Z_{48} \to \bar{A}) = Z_{28}\cdot Z_{45} + \bar{Z}_{48} + \bar{A}$$

Теперь избавляемся от инверсий, используя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$Z_{28}\cdot Z_{45}+\bar{Z}_{48}+\bar{A} = \overline{Z_{48}\cdot A} + Z_{28}\cdot Z_{45} = (Z_{48}\cdot A) \to (Z_{28}\cdot Z_{45})$$

Упрощаем выражение в правой части, используя утверждение 3: $Z_{28}\cdot Z_{45} = Z_{28\,\text{or}\,45}$. Вычисляем:

```
разряды 543210
   28 = 011100
   45 = 101101
28 or 45 = 111101 = 61
```

Нам нужно обеспечить истинность выражения $(Z_{48}\cdot A) \to Z_{61}$ при всех *x*. Согласно утверждению 2 для этого необходимо, чтобы множество битов числа 61 входило во множество битов числа 48 **or** *a*, то есть с помощью *a* мы можем добавить недостающие биты:

```
разряды 543210
   48 = 110000
   61 = 111101
```

Биты, которые обязательно должны быть в числе *a* – это биты в разрядах 3, 2 и 0 (выделены фоном), поэтому минимальное значение числа $a_{\min} = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13$. Можно выбрать и любое другое значение *a*, в двоичной записи которого эти биты равны 1.

Пример 5. (*А.Г. Гильдин*). Определите наименьшее натуральное число *a*, такое что выражение

$$(x \,\&\, 19 = 0) \land (x \,\&\, 38 \neq 0) \lor ((x \,\&\, 43 = 0) \to ((x \,\&\, a = 0) \land (x \,\&\, 43 = 0)))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $Z_{19}\cdot\bar{Z}_{38} + (Z_{43} \to (A\cdot Z_{43}))$. Упрощаем выражение, приводя его к импликации:

$$Z_{43} \to ((A\cdot Z_{43}) + (Z_{19}\cdot\bar{Z}_{38}))$$

Согласно свойству 1 импликации,

$$Z_{43} \to ((A\cdot Z_{43}) + (Z_{19}\cdot\bar{Z}_{38})) = (Z_{43} \to A\cdot Z_{43}) + (Z_{43} \to Z_{19}\cdot\bar{Z}_{38})$$

По утверждению 12, второе слагаемое в правой части можно отбросить, поэтому остается обеспечить истинность выражения $Z_{43} \to A\cdot Z_{43}$.

В силу утверждений 3 и 2, множество единичных битов числа *a* **or** 43 должно входить во множество единичных битов числа 43. Поэтому число *a* может содержать единичные биты только в тех разрядах, где они есть в двоичной записи числа 43. Таким образом, $a_{\max} = 43$. Кроме этого, можно использовать и другие значения *a*, все единичные биты которых входят во множество единичных битов числа 43: это 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42 и 43.

Пример 6. (*М.В. Кузнецова*). Определите наибольшее натуральное число *a*, такое что выражение

$$((x \,\&\, 13 \neq 0) \lor (x \,\&\, a \neq 0)) \to (x \,\&\, 13 \neq 0) \lor ((x \,\&\, a \neq 0) \land (x \,\&\, 39 = 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $((\overline{Z}_{13}+\overline{A})\to\overline{Z}_{13})+\overline{A}\cdot Z_{39}$. Упрощаем выражение, раскрывая импликацию:

$$((\overline{Z}_{13}+\overline{A})\to\overline{Z}_{13})+\overline{A}\cdot Z_{39}=\overline{\overline{Z}_{13}+\overline{A}}+\overline{Z}_{13}+\overline{A}\cdot Z_{39}=Z_{13}\cdot A+\overline{Z}_{13}+\overline{A}\cdot Z_{39}$$

Применяем распределительный закон

$$Z_{13}\cdot A+\overline{Z}_{13}=(Z_{13}+\overline{Z}_{13})\cdot(A+\overline{Z}_{13})=A+\overline{Z}_{13}$$

Получаем

$$Z_{13}\cdot A+\overline{Z}_{13}+\overline{A}\cdot Z_{39}=A+\overline{Z}_{13}+\overline{A}\cdot Z_{39}$$

Используем распределительный закон ещё раз

$$A+\overline{A}\cdot Z_{39}=(A+\overline{A})\cdot(A+Z_{39})=A+Z_{39}$$

так что выражение сводится к $A+\overline{Z}_{13}+Z_{39}$. Теперь избавляемся от инверсий, переходя к импликации:

$$A+\overline{Z}_{13}+Z_{39}=Z_{13}\to(A+Z_{39}).$$

По свойству 1 импликации имеем

$$Z_{13}\to(A+Z_{39})=(Z_{13}\to A)+(Z_{13}\to Z_{39})$$

Поскольку число 39 = 100111_2 содержит единичные биты, которых нет в числе 13 = 1101_2, второе слагаемое, $Z_{13}\to Z_{39}$, равно 0 (ложно для каких-то x), поэтому остается обеспечить только равенство $Z_{13}\to A=1$. В силу утверждения 2, для этого требуется, чтобы двоичная запись числа a имела единичные биты только там, где есть единичные биты в числе 13. Поэтому $a_{\max}$ = 13.

Кроме того, условие выполнено при выборе a = 1, 4, 5, 8, 9, 12 и 13. Количество этих решений несложно подсчитать. Число 13 содержит m = 3 ненулевых бита, в числе a каждый из них может быть равен 0 или 1. Поэтому общее количество возможных комбинаций равно 2^m. Учитывая, что нас интересуют только натуральные числа, нельзя выбрать все эти биты нулевыми, поэтому один вариант исключается. Итог: количество решений на множестве натуральных чисел равно 2^m-1.

Отметим, что если в этой задаче вместо чисел 13 и 39 взять, например, числа 53 и 21, то выражение истинно при любом выборе a (см. утверждение 6). Это связано с тем, что все единичные биты числа 21 = 10101_2 входят во множество единичных битов числа 53 = 110101_2.

Пример 7. Определите наибольшее натуральное число a, такое что выражение

$((x \mathbin{\&} 46 = 0) \vee (x \mathbin{\&} 18 = 0)) \to ((x \mathbin{\&} 115 \neq 0) \to (x \mathbin{\&} a = 0)))$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $(Z_{46}+Z_{18})\to(\overline{Z}_{115}\to A)$. Упрощаем выражение, раскрыв вторую импликацию и избавившись от инверсий:

$$(Z_{46}+Z_{18})\to(Z_{115}+A)$$

Преобразуем левую часть согласно Утверждению 8:

$$Z_{46}+Z_{18}\Rightarrow Z_{46\&18}=Z_2$$

и получаем таким образом (с помощью свойства 1 импликации)

$$Z_2\to(Z_{115}+A)=(Z_2\to Z_{115})+(Z_2\to A)$$

Первая импликация в сумме равна 0, так как двоичная запись числа 115 содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа 2. Поэтому требуется обеспечить истинность второй импликации, $Z_2\to A$. Для этого множество единичных битов числа *a* должно входить во множество единичных битов числа 2 (а это единственный бит в 1-м разряде). Поэтому единственное натуральное число *a*, удовлетворяющее условию – это 2.

Пример 8. Определите наименьшее натуральное число *a*, такое что выражение

$$((x\ \&\ 23\neq\ 0)\wedge\ (x\ \&\ 45\neq 0))\to((x\ \&\ a\neq 0)\ \wedge\ (x\ \&\ 23\neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $(\overline{Z}_{23}\cdot\overline{Z}_{45})\to(\overline{A}\cdot\overline{Z}_{23})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликацию и избавляясь от инверсий:

$$\overline{\overline{Z}_{23}\cdot\overline{Z}_{45}}+\overline{A}\cdot\overline{Z}_{23}=Z_{23}+Z_{45}+\overline{A}\cdot\overline{Z}_{23}=(Z_{23}+\overline{A})\cdot(Z_{23}+\overline{Z}_{23})+Z_{45}=$$

$$=Z_{23}+\overline{A}+Z_{45}=A\to(Z_{23}+Z_{45})$$

Преобразуем левую часть согласно Свойству 1 импликации:

$$A\to(Z_{23}+Z_{45})=(A\to Z_{23})+(A\to Z_{45})\,.$$

Таким образом, нужно обеспечить выполнение для всех *x* одного из условий:

$$A\to Z_{23}=1 \text{ или } A\to Z_{45}=1\,.$$

Первое из них верно при минимальном значении 23, второе – при минимальном значении 45. Поэтому в качестве ответа выбираем наименьшее из двух – 23.

У этой задачи возможно интересное продолжение – давайте найдем **все решения, меньшие 100**. Сначала найдём все решения уравнения $A\to Z_{23}=1$. Учитывая, что

```
разряды 6543210
     23 = 0010111
```

биты 0, 1, 2 и 4 нужно обязательно сохранить. К ним можно добавить бит 3 (получается 23+8=31), бит 5 (23+32=55), биты 4 и 5 (23+32+8=63), бит 6 (23+64=87), биты 6 и 3 (23+64+8=95), остальные подходящие значения больше 100.

Теперь найдём все решения уравнения $A\to Z_{45}=1$. Запишем 45 в двоичной системе счисления:

```
разряды 6543210
     45 = 0101101
```

Рассуждая аналогично, добавляем биты 1 (45+2=47), 4 (45+16=61), 4 и 1 (45+16+2=63), остальные значения получаются больше 100.

В итоге получается такой список всех возможных значений *a*, меньших 100:

23, 31, 45, 47, 55, 61, 63, 87, 95.

Литература

1. К.Ю. Поляков, Множества и логика в задачах ЕГЭ // Информатика, № 10, 2015, с. 38-42.
2. К.Ю. Поляков, Битовые операции в задачах КИМ ЕГЭ по информатике. Электронный ресурс [URL: http://kpolyakov.spb.ru/download/bitwise.pdf] Дата обращения: 06.11.2016.